宇宙際タイヒミューラー理論への誘（いざな）い《レクチャーノート版》

望月新一（京大数理研）

2015 年 04 月

http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki
「過去と現在の研究」

§1. <u>Hodge-Arakelov 理論的動機付け</u>

まずは具体的な話から始めよう。実数 $h \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ は「<u>上から抑えたい</u> 量」とし、例えば、ある整数 $N \geq 2$ に対して等式（= '$a \in a$' の一種の「<u>定量版</u>」!）

$$N \cdot h \ \left(\stackrel{\text{def}}{=} \ h \ + \ h \ + \ \ldots \ + \ h \right) \ = \ h$$

が成り立つことが分かっているとする。（ここで、登場する「h」たちの <u>対称性</u>（=「左辺のみ」、「左辺 $\cup$ 右辺」）に注意！）すると、簡単な式変形を施すと、

$$(N-1) \cdot h \ = \ 0, \qquad \text{つまり、} \qquad h \ = \ 0$$

となることが帰結できる。この議論の簡単な「進化形」として、「比較的小さい」定数 $C \in \mathbb{R}$ に対して、不等式

$$N \cdot h \ \leq \ h + C$$

が成り立つことが分かっているとすると、

$$(N-1) \cdot h \ \leq \ C, \qquad \text{つまり、} \qquad h \ \leq \ \tfrac{1}{N-1} \cdot C$$

即ち、「h は当初の期待通り、<u>上から抑えられる</u>」ことが帰結できる。

さて、次は <u>楕円曲線</u> について考察してみよう。（p 進局所体や $\mathbb{C}$ 上の）<u>**Tate 曲線**</u> $E \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}}$ の場合、素数 l に対して l 等分点に関する自然な完全系列がある：

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{\mu}_l \longrightarrow E[l] \longrightarrow \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

つまり、次のような <u>標準的</u> な対象たちがとれる：

「<u>乗法的部分空間</u> $\quad \boldsymbol{\mu}_l \subseteq E[l]$」 と 「<u>生成元</u> $\quad \pm 1 \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$」

以下では、E = <u>楕円曲線</u>/<u>数体</u> F, <u>素数</u> $l \geq 5$ を固定する。また E は F のすべての有限素点において安定還元を持つと仮定する。すると、一般には、$E[l]$ に対してすべての <u>**bad multiplicative reduction**</u> の有限素点において上記の標準的な「乗法的部分空間」と「生成元」と一致する

<u>大域的</u> な「<u>乗法的部分空間</u>」と「<u>生成元</u>」

は <u>存在しない</u>！

が、仮に存在する（!!）と仮定しよう。すると、E を「大域的乗法的部分空間」で割ることによって得られる同種写像を $E \to E^*$ と書くと、各 bad な有限素点においてそれぞれの q-parameter は次のような関係式を満たす：

$$q_E^l \;=\; q_{E^*}$$

q-parameter たちから定まる数論的次数 $\in \mathbb{R}$ を、$\log(q_E),\ \log(q_{E^*})$ と書くと、上の関係式は次のようになる：

$$l \cdot \log(q_E) \;=\; \log(q_{E^*}) \;\in \mathbb{R}$$

一方、それぞれの楕円曲線の高さを $\mathrm{ht}_E, \mathrm{ht}_{E^*} \in \mathbb{R}$ と書くと、

$$\mathrm{ht}_{(-)} \approx \tfrac{1}{6} \cdot \log(q_{(-)})$$

（ただし、「≈」は「有界な定数差を除き」という意味）となり、また Faltings (1983) の有名な微分に関する計算により、

$$\mathrm{ht}_{E^*} \;\lesssim\; \mathrm{ht}_E + \log(l)$$

となることが分かる。従って、楕円曲線が登場する前の議論と同様に、

$$l \cdot \mathrm{ht}_E \;\lesssim\; \mathrm{ht}_E + \log(l), \qquad \text{つまり、} \qquad \mathrm{ht}_E \;\lesssim\; \tfrac{1}{l-1} \cdot \log(l) \;\lesssim\; \text{constant}$$

即ち、楕円曲線 E の高さ ht_E を上から抑えることができたので、（適切な仮定の下では）このような「大域的乗法的部分空間」を持つ楕円曲線 E の同型類は有限個しかないことを帰結することができる。

上のような議論はいずれ「大域的乗法的部分空間」等を持つとは限らない一般の楕円曲線に拡張したいのだが、その前に、「持つ」という（非現実的な！）仮定の下で、上の議論とは少し違うアプローチを検討したい。

そのためにも、**Hodge-Arakelov 理論**の基本定理＝古典的なガウス積分

$$\text{「動径系の標準的な山の体積」} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \;=\; \sqrt{\pi} = \sqrt{\text{「偏角系の周期」}}$$

の一種の「離散的多項式版」を、先ほどの「持つ」という仮定の下で「復習」する必要がある。

「離散版」のモデル：

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\delta\to 0} \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} \quad \rightsquigarrow \quad f(X+1)-f(X)$$

や、次数が d 未満の $\mathbb{Z}$ 係数の多項式に関する次の ‘同型’ :

$$\mathbb{Z}[X]^{<d} \quad `\stackrel{\sim}{\to}' \quad \bigoplus_{0}^{d-1} \mathbb{Z}$$

（[Hartshorne], I, §7 を参照！）Hodge-Arakelov 理論（≈ 1990 年代後半）では、これらのモデルの延長線上で、古典的な Arakelov 理論では無限素点において用いられる解析 = ‘∂, $\overline{\partial}$, Green 関数等’ の離散版を構築するのである。

Hodge-Arakelov 理論の基本定理 =具体的には、

テータ関数およびその微分を、l 等分点に制限する

ことによって得られる同型は次のように定式化できる：

$$\Gamma(E^\dagger, \mathcal{L})^{<l} \quad \stackrel{\sim}{\to} \quad \bigoplus_{j=-l^*}^{l^*} \underline{\underline{q}}^{j^2} \cdot \mathcal{O}_F$$

ただし、

- $E^\dagger \to E$ は E の「普遍ベクトル拡大」、
- 「$< l$」はその拡大に関する「相対的次数」、$l^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} (l-1)/2$、
- $\mathcal{L}$ は（非自明な）2 等分点に付随する線束、
- 「q」は bad な有限素点における q-parameter、$\underline{\underline{q}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} q^{1/2l}$、
- 左辺には、**Hodge filtration** F^{-i} が入り、$\mathrm{F}^{-i}/\mathrm{F}^{-i+1}$ は、（大体）

$\stackrel{\sim}{\to} \ \omega_E^{\otimes(-i)} \qquad (i = 0, 1, \ldots, l-1;\ \omega_E\ (\approx `d\log(U)')$ は原点での余接束)、

- 右辺には、直和分解と両立的な「ガロアの作用」が入る。

この同型は元々F 上で定義されるものだが、F のすべての素点における自然な整構造・計量と（ほぼ）両立的である。

同様な同型は楕円曲線のモジュライ・スタック上でも考察することができ、同型の証明は正に同型の両辺に現れるベクトル束の次数 [–] が一致するという計算によるものである（注：「$\log(q)$」は q-param. によって定まる因子）:

$$\frac{1}{l} \cdot \mathrm{LHS} \ \approx\ -\frac{1}{l} \cdot \sum_{i=0}^{l-1} i \cdot [\omega_E] \ \approx\ -\frac{l}{2} \cdot [\omega_E]$$

$$\frac{1}{l} \cdot \mathrm{RHS} \ \approx\ -\frac{1}{l^2} \cdot \sum_{j=1}^{l^*} j^2 \cdot [\log(q)] \ \approx\ -\frac{l}{24} \cdot [\log(q)] \ =\ -\frac{l}{2} \cdot [\omega_E]$$

一方、数体 上の設定に戻ると、F^i は上記の 直和分解 と 両立しない ため、その直和分解の直和因子への射影を用いると、（殆どの）j に対して（いわゆる「**数論的 Kodaira-Spencer 射**」の「親類」とも言える）線束の（非零な）射

$$(\mathcal{O}_F \ \approx) \ \ \mathrm{F}^0 \ \hookrightarrow \ \underline{\underline{q}}^{j^2} \cdot \mathcal{O}_F$$

を作ることができ、数論的次数 $\deg_{\mathrm{arith}}(\mathrm{F}^0) \ \approx \ 0$ となるため、楕円曲線のモジュライの 対数微分 $\Omega^{\log}_{\mathcal{M}}|_E$ による高さを $\mathrm{ht}_E \ \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ 2 \cdot \deg_{\mathrm{arith}}(\omega_E) = \deg_{\mathrm{arith}}(\Omega^{\log}_{\mathcal{M}}|_E)$ と書くと、

$$\tfrac{1}{6} \cdot \deg_{\mathrm{arith}}(\log(q)) \ = \ \mathrm{ht}_E \ < \ \mathrm{constant}$$

（ただし、「$\log(q)$」は q-parameter によって定まる数論的因子）のような 不等式 が帰結される！ただし、肝心な 大域的 な 乗法的部分空間 と 生成元 は実際には 存在しない ため、この議論は直ちに適用することはできない。

しかし今度は次のような 突拍子もない（！）ことを考えたくなる。もし例えば、

$$\left\{\underline{\underline{q}}^{j^2}\right\}_{j=1,\dots,l^*} \quad \mapsto \quad \underline{\underline{q}}$$

という対応によって、数体 F の 自己同型 を定義することができたらどうなるか。「自己同型」は 数論的線束の次数 を必ず 保つ わけだから、上記対応の 右辺 の次数の絶対値は 左辺 の（平均的！）次数の絶対値と比べて「小さい」ため、同じように、

$$\tfrac{1}{6} \cdot \deg_{\mathrm{arith}}(\log(q)) \ = \ \mathrm{ht}_E \ < \ \mathrm{constant}$$

のような 不等式 が帰結される！

もちろん、そのような数体の自己同型は実際には 存在しない !! しかし左辺の「$\{\underline{\underline{q}}^{j^2}\}$」と右辺の「$\underline{\underline{q}}$」を、それぞれ 別々 の「（通常型の）環・スキーム論」＝「数論的正則構造」に所属するものと見做し、所望の対応＝

「**HA** 理論をディオファントス幾何に応用する上での障害」

に対する一種の「同義反復的解決」

$$\left\{\underline{\underline{q}}^{j^2}\right\}_{j=1,\dots,l^*} \quad \mapsto \quad \underline{\underline{q}}$$

を、相異なる正則構造 を持つリーマン面の間の 擬等角写像 のようなものと思うとどうなるか。

注：「同義反復的な解決」が成立するような「補助の舞台」を構成した上で、その補助の舞台と「元の舞台」の比較（＝同型？殆ど同型？）を行なうというのは、数論幾何、いや数学の「常套手段」である！別の言い方をすると、「同義反復的な解決」を一旦ただでいただいてから、それによって生じるお釣りを勘定するという手法である。

「同義反復的な解決」の古典的な例：一旦借りた財産を用いて商売等の事業により儲けた新たな財産を利用して借りた財産を利子付きで返済するという（古代文明に遡る！）仕組み。有理数の加減乗除しか知られていない設定に対する、不定元およびそれを用いた代数的な式変形の導入。2〜4 次式の解の根号等による明示的な表示しか知られていない設定に対する、抽象的な「体」や「ガロア群」の導入。

つまり、（先ほどの数体上の楕円曲線の話に戻ると）通常の環・スキーム論を、部分的に解体することによって所望の対応を実現することができるということである。ただし、通常の環・スキーム論を、部分的に解体して＝歪めてしまったとき、

どの位の歪みが生じるかを計算する

必要がある。この壮大な計算が、**IUTeich の内容**である。

結論からいうと、具体的なレベルでは、添え字 j のところでは、（大体）

$$\leq \ j \cdot (\text{log-diff}_F + \text{log-cond}_E)$$

位の「歪み」が生じるのである。すると、上記の楕円曲線のモジュライ・スタック上の計算と全く同じ（＝ j に関する平均値！の「主要項」の) 計算により、

$$\tfrac{1}{6} \cdot \deg_{\text{arith}}(\log(q)) \ = \ \text{ht}_E \ \leq \ (1+\epsilon)(\text{log-diff}_F + \text{log-cond}_E) \ + \ \text{constant}$$

という不等式が帰結される。これがいわゆる

「**Szpiro 予想（の強い形）**」（$\Longleftrightarrow$ 「**ABC 予想**」）

である。

注：先ほどの「$N \cdot h = h$」に対応するものは、左右の「h」を区別する

$$\text{「同義反復的解決」} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{「}N \cdot h^{\mathrm{LHS}} = h^{\mathrm{RHS}}\text{」}$$

であり、「歪みを認めると、区別しないで済む」ため、「$N \cdot h \leq h + C$」、即ち「（強い形の）Szpiro 予想」が従うのである。

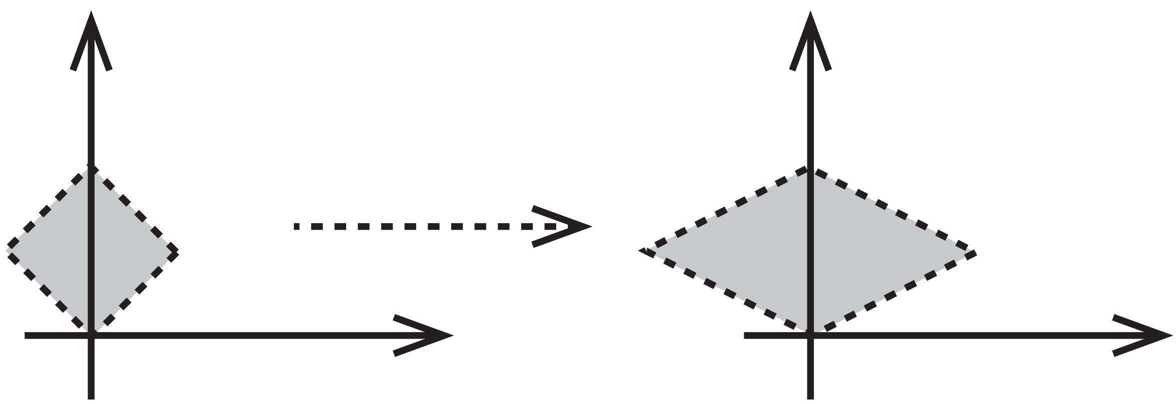
§2. **Teichmüller 理論的な変形**

ℂ 上の古典的な **Teichmüller 理論**:

リーマン面上の二次微分に付随する標準的な座標 $z = x + iy$ を用いると、膨張率 $1 < K < \infty$ に対して、**Teichmüller 変形**は次のような形で記述することができる：

$$z \mapsto \zeta = \xi + i\eta = Kx + iy$$

ポイント: 正則な次元 **1 本**に対して、下部の実次元が **2 本**あり、
そのうちの **1 本**が変形の対象となるのに対して、
もう **1 本**は固定される（＝変形の対象とならない）！



p **進 Teichmüller 理論**:

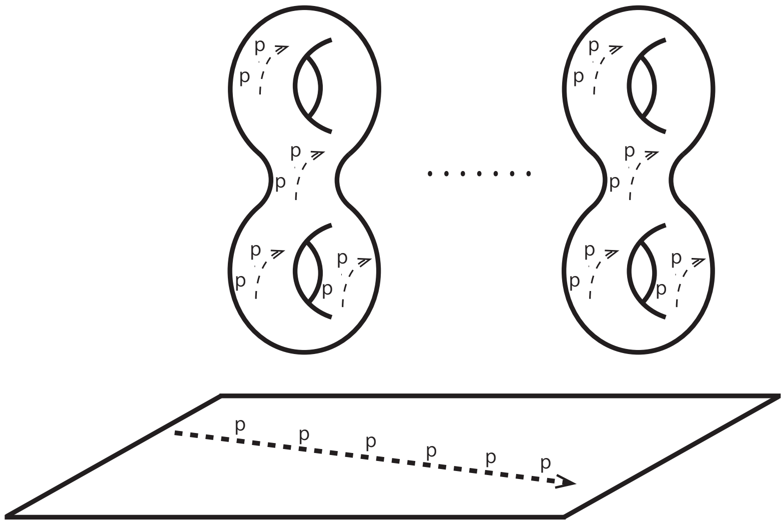
・正標数の双曲的曲線＋ベキ零な固有束に付随する ***p*** **進的な標準的持ち上げ**

・モジュライ・スタックの（双曲的に）ordinary な locus と同義反復的曲線上の**標準的 Frobenius 持ち上げ**

$\longleftrightarrow$ ℂ 上の理論における **Poincaré** 上半平面の計量＋ **Weil-Petersson 計量**

IUTeich と ***p*Teich**（または普遍的楕円曲線$/\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$！）の間の類似:

$\mathbb{Z}$ 上の通常のスキーム論 $\longleftrightarrow$ $\mathbb{F}_p$ 上のスキーム論
数体（＋有限個の素点） $\longleftrightarrow$ 正標数の双曲的曲線
数体上の一点抜き楕円曲線 $\longleftrightarrow$ ベキ零な固有束
対数・テータ格子 $\longleftrightarrow$ ***p*** 進的標準的持ち上げ ＋ **Frob.** の標準的持ち上げ



数論的な場合：足し算と掛け算。コホモロジー次元:

$\mathbb{Z}$ のような環の 環構造 を 数論的な正則次元 **1** 本 と見做し、

「足し算」　と　「掛け算」

$(\mathbb{Z},+)$　$\curvearrowleft$　$(\mathbb{Z},\times)$

組合せ論的次元 1 本　組合せ論的次元 1 本

を、その正則な 1 次元に付随する 下部の組合せ論的次元 **2** 本 と見做す！

... これは、

・（総虚な）数体 $F/\mathbb{Q} < \infty$ や
・p 進局所体 $k/\mathbb{Q}_p < \infty$
の絶対ガロア群の コホモロジー次元 **2** 本、

（注：$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ の「pro-l 的な部分」$\approx$ $\mathbb{Z}_l \rtimes \mathbb{Z}_l^{\times}$ ！）、あるいは、

・$\mathbb{C}^{\times}$ の 下部の実次元 **2** 本

に対応しているものと見ることができる。

単数群と値群:

p 進局所体 $k/\mathbb{Q}_p < \infty$ の場合、下部の組合せ論的次元 **2** 本 を次のように捉えることも可能である：

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_k^{\times} & \subseteq & k^{\times} & \twoheadrightarrow & k^{\times}/\mathcal{O}_k^{\times}\ (\cong \mathbb{Z}) \\ \text{組合せ論的次元 1 本} & & & & \text{組合せ論的次元 1 本} \end{array}$$

... 複素数の場合の次の直積分解に対応： $\mathbb{C}^{\times} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_{>0}$

IUTeich における 数体の「正則構造の変形」では、

テータ関数 を用いて 値群 は 変形 するが、

単数群 の方は 変形しない！

§3. 対数・テータ格子

Hodge theater 「•」たちの非可換（！）な「**2** 次元的な」図式:
2 次元は p 進局所体や「環」の下部の 組合せ論的次元 **2** 本 に対応している！

$$\begin{tikzcd} & \vdots & \vdots & \\ \cdots \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\ & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

IUTeich と ***p*Teich**（または **Witt** 環！） の間の類似:

$\bullet = \mathbb{Z}$ 上のスキーム論「一式」 $\longleftrightarrow$ $\mathbb{F}_p$ 上のスキーム論「一式」

$\Big\uparrow = \mathfrak{log}$-link = 「一式」同士の 貼り合わせ $\longleftrightarrow$ 正標数における Frobenius 射

$\longrightarrow = \Theta$-link = 「一式」同士の 貼り合わせ $\longleftrightarrow$ $\left(p^n/p^{n+1} \rightsquigarrow p^{n+1}/p^{n+2}\right)$

「環」の下部の 組合せ論的次元 **2** 本 と比較すると：

$$\longrightarrow \;=\; \Theta\text{-link} \;\;\longleftrightarrow\;\; `\times\text{'}:\; \mathbb{N}_{\geq 1} \;\cong\; \bigoplus_p p^{\mathbb{N}} \qquad (\implies p_1?\; p_2?\; p_1^{\lambda}\; (\mathbb{N} \ni \lambda \neq 0)\; ?)$$

$$\Big\uparrow \;=\; \mathfrak{log}\text{-link} \;\;\longleftrightarrow\;\; `\times\text{'} \rightsquigarrow `+\text{'} \;\; (\implies p_1 = 1 + \ldots + 1 \neq p_2 = 1 + \ldots + 1\; !!)$$

[$\Theta^{\pm \mathrm{ell}}$NF-]Hodge theater:

「[$\Theta^{\pm \mathrm{ell}}$NF-]Hodge theater」は、数体 F 上の楕円曲線 E に関連した 通常のスキーム論的数論幾何 のモデル「一式」である。もっと具体的なレベルでいうと、E/F やその様々な局所化から自然に生じる

抽象的なモノイド や ガロア群・数論的基本群

を、複雑な 系 に編成したものである。

編成の背後にある 原理： 大域的な 乗法的部分空間 + 生成元（§1 を参照！）のようなものを実現するための ***l*** **等分点の管理**！

$$\rightsquigarrow\;\; \mathbb{F}_l^{\circledast}\text{-},\; \mathbb{F}_l^{\rtimes\pm}\text{-}\textbf{対称性}$$

（ただし、$\mathbb{F}_l^{\circledast} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{F}_l^{\times}/\{\pm 1\}, \quad \mathbb{F}_l^{\rtimes\pm} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{F}_l \rtimes \{\pm 1\}$）

$$\overset{\{\pm 1\}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} -l^{\circledast} & < \;\ldots\; < & -1 & < 0 \\ & < \;1\; < & \ldots & < \;l^{\circledast} \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & < \;\ldots \\ & < \;l^{\circledast} \end{bmatrix} \;\Leftarrow\; \begin{pmatrix} 1 & < \;\ldots \\ & < \;l^{\circledast} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} & \Downarrow & \\ \pm & \rightarrow & \pm \\ \uparrow & \overset{\mathbb{F}_l^{\rtimes\pm}}{\curvearrowright} & \downarrow \\ \pm & \leftarrow & \pm \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \Downarrow & \\ \circledast & \rightarrow & \circledast \\ \uparrow & \overset{\mathbb{F}_l^{\circledast}}{\curvearrowright} & \downarrow \\ \circledast & \leftarrow & \circledast \end{array}$$

…cf. **ord. monodromy**! …cf. **s/sing.**!

編成の仕組みの ヒント：***p*** **進ホッジ理論** における、***p*-Hecke** **対応** の special fiber の構造や $\mathbb{Q}_p$ 上の楕円曲線のモジュライ上の 大域的な 乗法的部分空間

$$(p\text{-adic Tate module}) \otimes (p\text{-adic ring of fns.})$$

... $\rightsquigarrow$ 不思議（！）な ‘$\otimes$’ による 基点 の「組合せ論的再編成」！

$\longleftrightarrow$ Hodge theater における、絶対遠アーベル幾何！
= ‘ring of fns.’ の 二種類 の役割に対する「不変量」！

$\mathfrak{log}$-Link:

数体 F の **nonarch.** な v において $\mathfrak{log}$-link の両側（＝定義域と値域）のそれぞれの 環構造 は、環準同型とならない（！）形で関連付けられる：

$$\log_v : \mathcal{O}_{\overline{k}}^{\times} \ \to \ \overline{k}$$

（ただし、$\overline{k}$ は $k \stackrel{\mathrm{def}}{=} F_v$ の代数閉包。また $G_v \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ と置く。）

ポイント: $\mathfrak{log}$-link は、両側の数論的基本群 Π_v の間の同型

$$\Pi_v \ \stackrel{\sim}{\to} \ \Pi_v$$

と、$\Pi_v \twoheadrightarrow G_v$ を経由した 自然な作用 に関して 両立的 である。付値 v を動かすと、大域的な絶対ガロア群 の作用とも両立的である。また数体 F の **arch.** な v においても類似的な理論が存在する。

Θ-Link:

数体 F の **bad nonarch.** な v において Θ-link の両側（＝定義域と値域）のそれぞれの 環構造 は、環準同型とならない（！）形で関連付けられる：

$$\mathcal{O}_{\overline{k}}^{\times} \ \stackrel{\sim}{\to} \ \mathcal{O}_{\overline{k}}^{\times}; \qquad\qquad (\Theta|_{l\text{-tors}})^{\mathbb{N}} = \left\{ \underline{\underline{q}}^{j^2} \right\}_{j=1,\dots,l^*}^{\mathbb{N}} \ \stackrel{\sim}{\to} \ \underline{\underline{q}}^{\mathbb{N}}$$

（ただし、$\overline{k}$ は $k \stackrel{\mathrm{def}}{=} F_v$ の代数閉包。また $G_v \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ と置く。）

ポイント: Θ-link は、両側の局所体の絶対ガロア群 G_v の間の同型

$$G_v \ \stackrel{\sim}{\to} \ G_v$$

と、それぞれの $\mathcal{O}_{\overline{k}}^{\times}$ への 自然な作用 に関して 両立的 である。また数体 F の **good nonarch./arch.** な v においても、積公式 を満たすように Θ-link を類似的な手法で定義する。

注: （Hodge theater に登場するような）

「抽象的なモノイド 等」

を扱うようにしないと、$\mathfrak{log}$-, Θ-link のような（通常の環・スキーム論の 環構造 に対する）「壁＝障壁」を定義することすらできない！

注: 一方、対数・テータ格子の

数論的基本群・ガロア群

的な部分で構成される **étale-picture** に登場する対象たちは、これらの

「壁」をすり抜ける力

（＝「ガロア同変性」により）がある！（下図を参照！）二種類の数学的対象

抽象的なモノイド ＝ **Frobenius 型** の対象,

数論的基本群・ガロア群 ＝ **étale 型** の対象

を関連付ける、様々な形の「**Kummer 理論**」は、IUTeich 全体の中でも極めて重要な役割を果たす！ また

「**Frobenius 型** $\rightsquigarrow$ **étale 型**」

へと移行する操作は、古典的な ガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \;=\; \sqrt{\pi} \qquad \Big(= \text{「ウェイト } \tfrac{1}{2}\text{」!}\Big) \;\notin\; \mathbb{Q}\cdot\pi^{\mathbb{Z}} \;\ni\; \zeta(n \in 2\cdot\mathbb{Z})$$

の計算（＝「デカルト座標 $\rightsquigarrow$ 極座標」）の、数体上大域的な類似物 と見ることができる！実際、この計算に出てくる式変形

$$\begin{aligned} 2\cdot\left(\int e^{-x^2}dx\right)^2 \;&=\; 2\cdot\int\int e^{-x^2-y^2}\; dx\; dy \;=\; \int\int e^{-r^2}\cdot 2rdr\; d\theta \\ &=\; \int\int d(e^{-r^2})\; d\theta \;=\; \int\int du\; d\theta \end{aligned}$$

つまり、$e^{-r^2} \rightsquigarrow u$ という奇跡（！）のような座標変換は、**Θ-link** の対応と形がよく似ている！

$$\begin{tikzcd}
\cdots & \boxed{\begin{array}{c}\text{arith. hol.}\\ \text{str. } \Pi_v\end{array}} \arrow[d, dash] & \cdots \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{arith.}\\ \text{hol. str.}\\ \Pi_v\end{array}} \arrow[r, dash] & \boxed{\begin{array}{c}\text{mono-}\\ \text{analytic}\\ \text{core } G_v\end{array}} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \boxed{\begin{array}{c}\text{arith.}\\ \text{hol. str.}\\ \Pi_v\end{array}} \\
\cdots & \boxed{\begin{array}{c}\text{arith. hol.}\\ \text{str. } \Pi_v\end{array}} & \cdots
\end{tikzcd}$$

Kummer 理論を適用 する主な対象（＝ **Θ-link の左側** を参照！）:

(a) 単数群 $\mathcal{O}^{\times}_{\underline{k}} \curvearrowleft \widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ （nonarch. v）

(b) テータ関数の値 $\Theta|_{l\text{-tors}} = \left\{ \underline{\underline{q}}^{j^2} \right\}_{j=1,\dots,l^*}$ （bad nonarch. v）

(c) 数体 $F\ (\supseteq F^{\times})$ の一種の「実化」

理論の主なポイントは 単数群 と 値群 を 分離 し、(b), (c) に関連するモノイドに含まれる 円分物（$\cong \widehat{\mathbb{Z}}(1)$）を、「$\curvearrowleft\ \widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$」という 不定性 から守ること＝「円分剛性」！

(b) の場合：エタール・テータ関数の理論 $\Longrightarrow$ 分離＋円分剛性
(c) の場合：初等的代数的整数論 $\Longrightarrow$ 分離＋円分剛性

Hodge theater のそれぞれの 対称性 が働く領域は、(b), (c) のそれぞれの Kummer 理論の実行に適している（下表を参照）！

この状況は、古典的な上半平面 $\mathfrak{H}$ の様々な 対称性 に付随する「関数」の（よく知られている）初等的な理論によく似ている（下表を参照）！これらの対称性は **Bogomolov** による **幾何的 Szp. 予想の別証明** の「出発点」でもある！

	古典的な上半平面 $\mathfrak{H}$	**IUTeich における $\Theta^{\pm\mathrm{ell}}$NF-Hodge th.**
（カスプ型の）加法的対称性	$z \mapsto z + a,$ $z \mapsto -\overline{z} + a \quad (a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{F}_l^{\rtimes\pm}$-対称性
加法的対称性に付随「局所的な関数」	超越的関数 $q \overset{\mathrm{def}}{=} e^{2\pi i z}$	$\Theta|_{l\text{-tors}} = \left\{ \underline{\underline{q}}^{j^2} \right\}_{j=1,\dots,l^*}$
（ノード・トーラス型の）乗法的対称性	$z \mapsto \frac{z\cdot\cos(t)-\sin(t)}{z\cdot\sin(t)+\cos(t)},$ $z \mapsto \frac{\overline{z}\cdot\cos(t)+\sin(t)}{\overline{z}\cdot\sin(t)-\cos(t)}$ $(t\in\mathbb{R})$	$\mathbb{F}_l^{*}$-対称性
乗法的対称性に付随する「大域的な関数」	代数的有理関数 $w \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{z-i}{z+i}$	数体 F の元に対する **Belyi** 写像による表示

実は、先ほどの IUTeich の議論は上半平面上の古典的な テータ関数

$$\theta(t) \ = \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$$

に対する ヤコビの変換式

$$\theta(t) \ = \ t^{-1/2} \cdot \theta(1/t)$$

（＝ある意味、先ほど出てきた ガウス積分 の計算の 関数版 と見做せる！）と、様々な側面において非常によく似ている（下表を参照）！

IUTeich	ヤコビの変換式に関連した理論
エタール・テータ関数の剛性性質	ガウス分布のフーリエ変換に関する不変性
$\mathcal{O}^{\times}_{\underline{k}} \ \curvearrowleft \ \widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ という不定性	フーリエ変換に出てくる指標 $\int(-)\cdot e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$
テータ群の $[-,-]$ の二次性による剛性性質の証明	ガウス分布の指数の二次性によるフーリエ不変性の証明
$\left\{\underline{\underline{q}}^{j^2}\right\}_{j=1,\ldots,l^*}$	テータ関数のガウス分布型展開
$\mathfrak{log}$-link による $\boxplus$, $\boxtimes$ の回転に対する絶対遠アーベル幾何の適用	回転 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow t \mapsto \frac{1}{t}$ 即ち $\infty \ \rightsquigarrow \ 0$ への解析接続
絶対遠アーベル幾何アルゴリズムの局所・大域間の関手性、**Belyi** カスプ化	上半平面全体への解析接続

この <u>テータ関数</u>

$$\theta(t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$$

に対する <u>ヤコビの変換式</u>

$$\theta(t) \;=\; t^{-1/2} \cdot \theta(1/t)$$

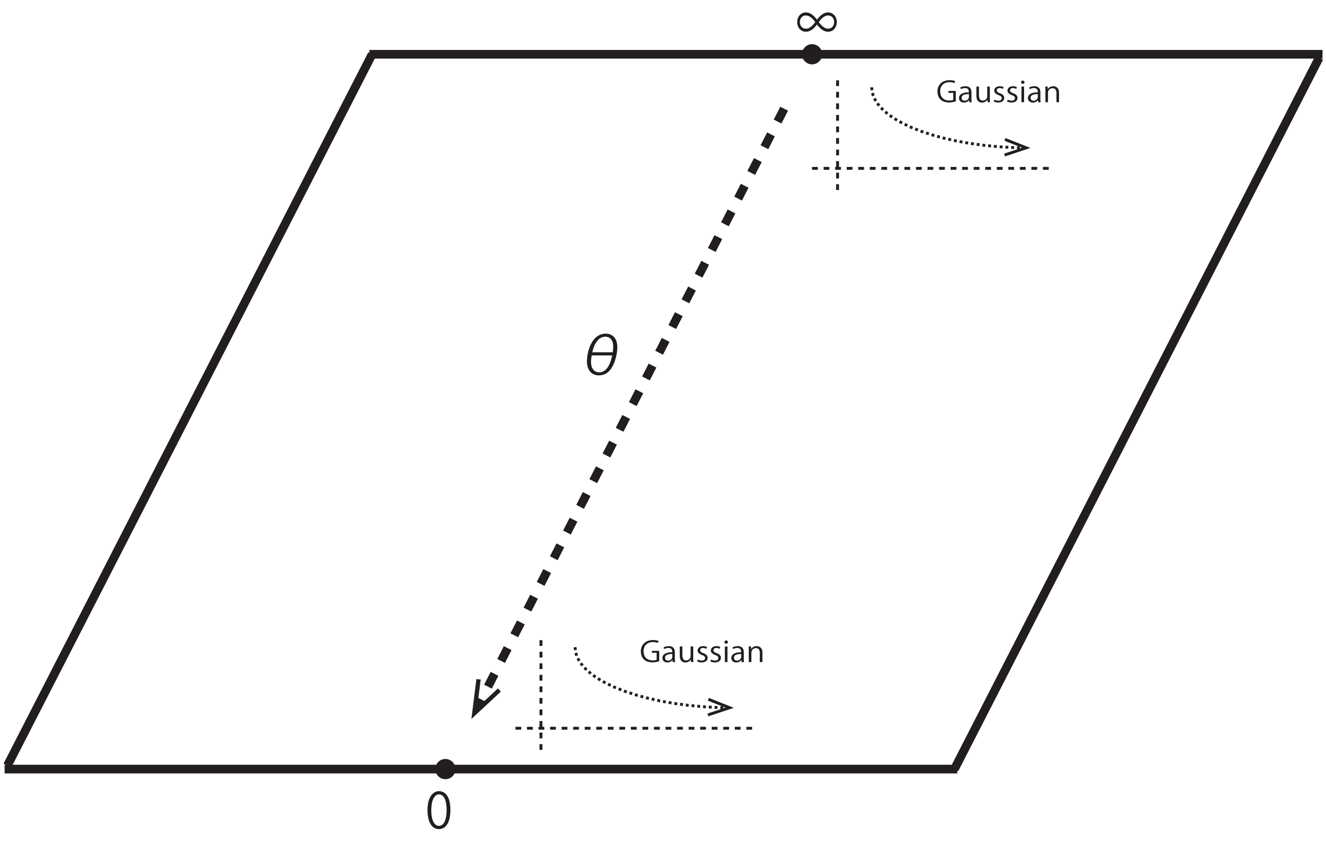
は次のように解釈することもできる： ∞ の近傍において各非定数項が<u>「急減少関数」</u>となるような和によって表示可能であるという性質は、

$$\infty \;\rightsquigarrow\; 0$$

と <u>解析接続</u> しても、<u>不思議</u> なことに 0 の近傍においても成立する！これはちょうど§1 に出てきた <u>大域的</u> な

$$「\;\left\{\underline{\underline{q}}^{j^2}\right\}_{j=1,\ldots,l^*}\;」$$

の実現に対応している！



§4. 宇宙際性と遠アーベル幾何

$\mathfrak{log}$-link 及び Θ-link

$$\log_v : \mathcal{O}^{\times}_{\overline{k}} \ \to \ \overline{k}, \qquad\qquad (\Theta|_{l\text{-tors}})^{\mathbb{N}} = \left\{\underline{\underline{q}}^{j^2}\right\}^{\mathbb{N}}_{j=1,\dots,l^*} \ \xrightarrow{\sim} \ \underline{\underline{q}}^{\mathbb{N}}$$

は、定義域・値域の 環構造 と 両立しない ため、環構造 から生じる スキーム論的な 「基点」や、

$$\text{ガロア群} \quad (\quad \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathrm{field}}(\overline{k}) \ \ !! \quad)$$

と、本質的に両立しない！　つまり、$\mathfrak{log}$-, Θ-link の「向こう側」に移行するとき、

“Π_v” や “G_v”

は、抽象的な位相群 としてしか、「向こう側」のスキーム論に通用しない！（体の自己同型によって引き起こされる絶対ガロア群の外部自己同型の場合を参照。）

$\Longrightarrow$ 定義域·値域双方の環構造の間の関係を計算するためには、遠アーベル幾何を活用するしかない！過去の論文のレベルでいうと、

絶対遠アーベル幾何　や　エタール・テータ関数の様々な剛性性質

に関する

- Semi-graphs of Anabelioids
- The Geometry of Frobenioids I, II
- The Étale Theta Function ...
- Topics in Absolute Anab. Geo. III

の結果や理論を適用することによって主定理を帰結する：

主定理：　**Θ-link** の 左辺 に対して、軽微な不定性を除いて、右辺 の「異質」な 環構造 しか用いない言葉により、明示的なアルゴリズム による記述を与えることができる。

解釈 :「狭いパイプ」でしか繋がっていないような状況（＝例えば、　宇宙船にいる宇宙飛行士や地下の鉱山で働く作業員等）において、限られた情報 を賢く利用することによって「向こう側」の状況を復元し、把握することができる。

証明のポイント:

・$G_v \curvearrowright \mathcal{O}^{\times}_{\overline{k}}$ の コア性（coricity）!

・二種類の数学的対象を関連付ける、様々な形の「**Kummer 理論**」
（§3 後半の解説を参照）:

$$\text{抽象的なモノイド} = \textbf{Frobenius 型}\text{ の対象},$$
$$\text{数論的基本群・ガロア群} = \textbf{étale 型}\text{ の対象}$$

ここで、ガウス積分 の計算との類似＝「単数群 と 値群 の 分離」を思い出そう：

$\mathfrak{log}$**-, Θ-link** や対数・テータ格子の定義 $\longleftrightarrow$ デカルト座標

絶対遠アーベル幾何 を用いたアルゴリズムによる記述 $\longleftrightarrow$ 極座標

円分物 ($\cong \widehat{\mathbb{Z}}(1)$) の確保＝剛性が肝心！ $\longleftrightarrow$ $\mathbb{S}^1 \curvearrowright$ による座標変換

・「**log-shell**」＝「乗法的な対象のための加法的な入れ物」log(−) への作用

$$\text{テータ関数の値} \ \left\{\underline{\underline{q}}^{j^2}\right\}_{j=1,\dots,l^*} \curvearrowright \log(\mathcal{O}^{\times}_{\overline{k}}) \curvearrowleft F^{\times} \subseteq F \ \text{数体}$$

（Bogomolov の証明を参照！）を実現するためには、$\mathfrak{log}$**-link** の活用が必要不可欠である。

... 一方、対数・テータ格子 の 非可換性 によって様々な困難が生じる。

$\Longrightarrow$ 後の「体積計算」では、（等式ではなく！）不等式 しか出ない！

主定理のアルゴリズムの 出力 に対して、体積計算 を行うと、§1 で解説したように次のような帰結が得られる（Faltings による **Mordell 予想** の証明に出てくる、類体論 や $\boldsymbol{p}$ **進ホッジ理論**、アーベル多様体関連の代数幾何 等を参照！）:

系: 「（強い形の）**Szpiro 予想**」（$\Longleftrightarrow$ 「**ABC 予想**」)。

$$\mathrm{ht}_E \ \leq \ (1+\epsilon)(\text{log-diff}_F + \text{log-cond}_E) \ + \ \text{constant}$$

ここで「$N \cdot h^{\mathrm{LHS}} = h^{\mathrm{RHS}}$」（＝ Θ-link！）や「$N \cdot h \leq h + C$」（＝ 主定理＋体積計算）の議論（§1）を思い出そう！

先ほどの議論は、§3 の最後に解説した ヤコビの変換式 との類似で考えると、様々な類似点が浮かび上がる：

IUTeich	ヤコビの変換式に関連した理論
宇宙＝集合に対する ラベル付けの仕組み の変換	座標＝空間の点に対する ラベル付けの仕組み の変換
log-shell $\log(-)$ の体積計算	ガウス積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ の極座標による計算
ディオファントス幾何への驚異的な応用	古典的テータ関数の値の計算における驚異的な精度の向上

実は、先ほどの不等式に登場した「ϵ」は、

$$(\mathrm{ht}_E)^{-\frac{1}{2}} \cdot \log(\mathrm{ht}_E)$$

位のオーダーに 抑える ことができる。この「$\frac{1}{2}$」はリーマン予想を連想させられる値であるが、まさしく リーマン予想 と同じく、

「ウエイト 1/2」

（注：「ウェイト」はリーマン・ゼータ $\zeta(s)$ の「s」）、つまり（Tate 捻りに対応する）π の整数冪ではなく、π の平方根

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

に関係する現象である。実際、先ほどの「ϵ」の計算では、ガウス積分やテータ関数に現れるような 二次形式 が出てきて、その量の最少値を求めると、二次形式の根＝ 平方根 ＝「$(\mathrm{ht}_E)^{-\frac{1}{2}}$」という式が発生するのである。

p 進局所体上の双曲的曲線や $\mathbb{C}$ 上のリーマン面の幾何に関する古典的な理論との類似でいうと、「正則構造の体積」を 正則構造の外 にある枠組で計算することによって得られる、次のような（「双曲性」を表現している！）不等式が対応していると見做せる：

- **pTeich** における
$$\text{“}\underline{\textbf{Hasse invariant}} = \frac{1}{p} \cdot d(\underline{\textbf{Frob. lift.}})\text{”}$$
の次数 $= (2g-2)(1-p) \leq 0$

- 双曲的なリーマン面 S 上の **Gauss-Bonnet の定理**
$$0 \ > \ - \int_S (\text{Poincaré metric}) \ = \ 4\pi(1-g)$$

最後に、「**IU 幾何の心**」＝

「通常のスキーム論が有効ではないような ‘組合せ論的’ な設定において、通常の スキーム論 に ヒント を得た構成を行ない、通常のスキーム論をある程度 近似 することによって 非自明 な結果を出す」

という考え方のもう一つの（より 初等的 な）例として

組合せ論的遠アーベル幾何 $\rightsquigarrow$ **GT 群** に関する様々な結果

という例が存在することを指摘したい。これらの結果の趣旨は、GT 群が「$G_{\mathbb{Q}}$ と同型である」ことを示す 代わり に、GT 群が $G_{\mathbb{Q}}$ と「類似的な性質」を満たすことを示すことにある。